Matematyka dyskretna dla informatyków

ZADANIA

Część I: Elementy kombinatoryki

Jerzy Jaworski

Zbigniew Palka

Jerzy Szymański

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

Poznań 2007

Spis treści

1

Metody dowodzenia twierdzeń

Zadanie 1.1. Udowodnić wprost, że jeżeli a i b są nieparzystymi liczbami całkowitymi, to $a + b$ jest parzystą liczbą całkowitą.

Zadanie 1.2. Udowodnić nie wprost, że dla dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n też jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 1.3. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $n > 1$ i n nie jest liczbą pierwszą. Udowodnić przez sprowadzenie do sprzeczności, że n posiada co najmniej jeden dzielnik pierwszy p taki, że $p \leq \sqrt{n}$.

Zadanie 1.4. Korzystając z zadania 1.3 udowodnić wprost, że liczba 101 jest pierwsza.

Zadanie 1.5. Udowodnić przez zaprzeczenie następujące stwierdzenie:

> Niech $m_1, m_2, \ldots, m_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Jeżeli
>
> $$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + 1$$
>
> kul włożymy do n szufladek, to pierwsza szufladka będzie zawierać co najmniej m_1 kul lub druga szufladka zawierać będzie co najmniej m_2 kul, lub ..., lub n–ta szufladka zawierać będzie co najmniej m_n kul.

Zadanie 1.6. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)\,,$

(c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\,.$

Zadanie 1.7. Udowodnić przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Zadanie 1.8. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Zadanie 1.9. Niech A będzie dowolnym zbiorem skończonym. Udowodnić przez indukcję względem n, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

$$|A \times [n]| = n|A|.$$

Zadanie 1.10. Udowodnij na dwa sposoby, przez indukcję i wprost, że dla dowolnego naturalnego n liczba $n(n+1)$ jest parzysta.

Zadanie 1.11. Udowodnić, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$ wyrażenie

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

jest podzielne przez 133.

Zadanie 1.12. Udowodnij, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 17$

$$2^n > n^4\,.$$

Zadanie 1.13. Udowodnić, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 9$

$$n! > 4^n\,.$$

Zadanie 1.14. Udowodnić, że dla dowolnego rzeczywistego $x > -1$ i dla każdego naturalnego n

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx\,.$$

Zadanie 1.15. Udowodnić, że suma n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a i o ilorazie q ($q \neq 1$) równa jest

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q}\,.$$

Zadanie 1.16. Udowodnić, że jeżeli $a_0 = 6, a_1 = 11$ oraz dla $n \geqslant 2$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\,,$$

to dla każdego $n \geqslant 0$

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1\,.$$

Zadanie 1.17. Grupa 41 studentów zaliczyła sesję składającą się z trzech egzaminów, w których możliwymi ocenami były bdb, db i dst. Wykazać, że co najmniej pięcioro studentów zaliczyło sesję z jednakowym „zbiorem” ocen.

Zadanie 1.18. Grupa osób wita się między sobą (niekoniecznie każdy z każdym) przez podanie ręki. Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż jeden raz. Pokazać, że po zakończonym powitaniu będą co najmniej dwie osoby, które podawały rękę tę samą ilość razy.

Zadanie 1.19. Dany jest zbiór złożony z dziesięciu liczb naturalnych, dwucyfrowych w rozwinięciu dziesiętnym. Pokazać, że w tym zbiorze istnieją takie dwa niepuste podzbiory, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.

Zadanie 1.20. Pokazać, że dla dowolnego zbioru złożonego z dwunastu różnych liczb naturalnych mniejszych od 120 istnieją cztery podzbiory, których elementy sumują się do tej samej liczby.

Zadanie 1.21. W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej. Pokazać, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zadanie 1.22. Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które sumują się do $2n+1$.

Zadanie 1.23. Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.

Zadanie 1.24. Pokazać, że dla dowolnych n dodatnich liczb całkowitych istnieje podzbiór, którego suma liczb jest podzielna przez n.

Zadanie 1.25. Niech A będzie dwudziestoelementowym podzbiorem zbioru $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 100\}$. Udowodnij, że A zawiera dwie różne liczby, których suma jest równa 104.

Zadanie 1.26. Niech dla ustalonego n naturalnego A będzie podzbiorem mocy $n+1$ zbioru $[2n]$. Udowodnić, że A zawiera dwie różne liczby a i b, takie że a jest dzielnikiem b.

2

Podstawowe zasady i prawa przeliczania

Zadanie 2.1. Wskazać bijekcję pomiędzy następującymi rodzinami obiektów kombinatorycznych:

(a) rozmieszczenia k identycznych kul w n oznaczonych szufladkach, nie pozostawiające żadnej szufladki pustej,

(b) rozbicia liczby k na n uporządkowanych, całkowitoliczbowych i dodatnich składników,

(c) ciągi binarne złożone z $n-1$ jedynek i $k-n$ zer.

Zadanie 2.2. Na ile sposobów można rozmieścić osiem wież na szachownicy (o wymiarze 8×8) tak, aby żadna nie mogła bić innej?

Zadanie 2.3. Ile przekątnych ma n-kąt wypukły?

Zadanie 2.4. Na ile sposobów można wybrać mężczyznę i kobietę, którzy nie są mężem i żoną, z grupy osób złożonej z n par małżeńskich?

Zadanie 2.5. Są cztery różne drogi z miasta A do miasta B, trzy różne drogi z miasta B do miasta C i dwie różne drogi z A do C.

(a) Na ile sposobów można dojechać z A do C?

(b) Na ile sposobów można dojechać z A do B i z powrotem?

(c) Na ile sposobów można dojechać z A do B i z powrotem nie jadąc żadną drogą dwa razy?

Zadanie 2.6. Ile można utworzyć nieuporządkowanych par liczb całkowitych od 0 do n (włącznie), w których różnica równa się k?

Zadanie 2.7. Ile jest podpseudozbiorów mocy 11 pseudozbioru, który zawiera cztery elementy a, trzy elementy b i jedenaście elementów c?

Zadanie 2.8. Anna i Bartosz grają w kości rzucając jednocześnie czterema kostkami. Jeżeli wśród tych czterech kostek wypadnie chociaż jedna szóstka, to wygrywa Anna, w przeciwnym razie wygrywa Bartosz. Kto z nich ma większe szanse na wygraną?

Zadanie 2.9. Na ile sposobów mażna wybrać z klasy liczącej trzydziestu uczniów drużynę piłkarską złożoną z jedenastu graczy i drużynę koszykarską złożoną z pięciu graczy jeżeli:

(a) żaden uczeń nie może grać w obu drużynach,

(b) co najwyżej jeden uczeń może grać w obu drużynach,

(c) dowolna liczba uczniów może grać w obu drużynach?

Zadanie 2.10. Na ile sposobów możemy rozmieścić k rozróżnialnych kul w n oznaczonych szufladkach, przy założeniu, że każda szufladka zawiera co najwyżej jedną kulę?

Zadanie 2.11. Ile jest liczb naturalnych palindromicznych (tj. identycznych przy czytaniu w obu kierunkach, np. 12321) mających:

(a) pięć cyfr,

(b) $2k + 1$ cyfr ($k \in \mathbb{N}$),

(c) $2k$ cyfr ($k \in \mathbb{N}$)?

Zadanie 2.12. Ile palindromów n-literowych można utworzyć mając do dyspozycji alfabet mający m liter?

Zadanie 2.13. Ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3 takich, że

(a) środkowa cyfra jest równa d, dla $d = 0, 1, \ldots, 9$,

(b) zawierają cyfrę d, dla $d = 0, 1, \ldots, 9$,

(c) nie zawierają cyfry d, dla $d = 0, 1, \ldots, 9$?

Zadanie 2.14. Ile jest pięciocyfrowych liczb, w których cyfra 3 występuje dokładnie jeden raz?

Zadanie 2.15. Ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest nie większa niż 43?

Zadanie 2.16. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest nie większa niż 51?

Zadanie 2.17. Ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr należy do zbioru $\{3, 4, \ldots, 60\}$?

Zadanie 2.18. Na ile sposobów możemy wybrać z talii 52 kart dwie kolejne karty, w ten sposób, że pierwsza karta będzie treflem ($\clubsuit$) a druga karta nie będzie damą?

Zadanie 2.19. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, dla których pierwsza cyfra jest większa od ostatniej?

Zadanie 2.20. Ile jest liczb naturalnych mniejszych bądź równych 10^n, w których nie występują obok siebie dwie jednakowe cyfry?

Zadanie 2.21. Na ile sposobów możemy utworzyć niepusty podzbiór mając do dyspozycji pięć identycznych jabłek i osiem identycznych brzoskwiń?

Zadanie 2.22. Spośród stu studentów pięćdziesięciu uczy się francuskiego, czterdziestu łaciny, a dwudziestu obu tych języków. Ilu z nich nie uczy się ani francuskiego ani łaciny?

Zadanie 2.23. W trzydziestoosobowej klasie dwudziestu uczniów uczy się łaciny, czternastu greki a dziesięciu hebrajskiego. Jeśli żadne dziecko nie uczy się wszystkich trzech języków, a ośmioro nie uczy się żadnego, to ilu uczy się greki i hebrajskiego?

Zadanie 2.24. Ile jest liczb naturalnych nie większych niż 1000, które

(a) nie są podzielne ani przez 3, ani przez 7, ani przez 11,

(b) nie są podzielne ani przez 4, ani przez 6, ani przez 9?

Zadanie 2.25. Ile jest liczb naturalnych nie większych niż 1000, które

(a) nie są podzielne przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej niż 1,

(b) nie są podzielne przez sześcian żadnej liczby naturalnej większej niż 1?

Zadanie 2.26. Ile jest ciągów długości $2n$ zawierających każdą z liczb ze zbioru $[n]$ dwa razy, i takich że żadne dwie równe liczby nie zajmują sąsiednich pozycji.

3

Schematy wyboru i tożsamości kombinatoryczne

Zadanie 3.1. W ilu permutacjach liczb od 0 do 9, liczby 2, 6 i 9 (niekoniecznie w tej kolejności) stoją na trzech sąsiednich miejscach?

Zadanie 3.2. Mamy 10 par butów. Na ile sposobów możemy z tych 20 butów wybrać 4 tak, by otrzymać co najmniej jedną parę?

Zadanie 3.3. Udowodnić, korzystając z indukcji matematycznej względem k, że liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa n^k (porównaj wzór (**??**)).

Zadanie 3.4. Ile jest „monotonicznych” liczb naturalnych n-cyfrowych, jeżeli „monotoniczna” oznacza, że

(a) każda cyfra jest większa od poprzedniej,

(b) każda cyfra jest nie mniejsza od poprzedniej,

(c) każda cyfra jest nie mniejsza od poprzedniej i co najmniej jedna cyfra jest większa od poprzedniej?

Zadanie 3.5. Rzucamy dwunastoma kostkami do gry. Pokazać, że połowa z możliwych wyników daje parzystą sumę liczby oczek.

Zadanie 3.6. Na ile sposobów 10 mężczyzn może poprosić do tańca 10 kobiet?

Zadanie 3.7. Na ile sposobów można połączyć w pary 20 osób?

Zadanie 3.8. Na ile sposobów można ułożyć w ciąg n identycznych kul białych i m identycznych kul czarnych?

Zadanie 3.9. Uczestnik zakładów totalizatora sportowego przewiduje wyniki 12 różnych spotkań piłkarskich mając do dyspozycji trzy możliwości: zwycięstwo gospodarzy, ich porażkę lub remis. Ile kuponów trzeba wypełnić by mieć pewność 12 trafień?

Zadanie 3.10. Na ile sposobów można rozmieścić cztery identyczne pomarańcze i sześć różnych jabłek w pięciu ponumerowanych skrzynkach?

Zadanie 3.11. Na ile sposobów można rozmieścić 25 identycznych listów w dziesięciu różnych przegródkach tak, aby w każdej przegródce był co najmniej jeden list?

Zadanie 3.12. Przed wejściem do kina stoi n osób, jedna za drugą. Osoby te będą wpuszczane na seans do kina w k grupach (każda grupa składa się z co najmniej jednej osoby). Na ile sposobów można utworzyć tych k grup?

Zadanie 3.13. Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 90$$

gdzie każde x_i jest liczbą całkowitą większą od 3?

Zadanie 3.14. Ile spośród wszystkich prostokątów, które można utworzyć na kracie $n \times n$, jest kwadratami?

Zadanie 3.15. Rozpisać wyrażenie $(a + b + c)^4$.

Zadanie 3.16. Z n różnych kul kolorujemy k mając do dyspozycji dwie barwy ($n \geqslant k \geqslant 1$). Na ile sposobów możemy to uczynić?

Rozwiązując ten problem dwoma różnymi sposobami pokazać, że zachodzi następująca zależność kombinatoryczna:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}2^k.$$

Zadanie 3.17. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca zależność kombinatoryczna:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2}^2.$$

Zadanie 3.18. Udowodnić, dla $n \geqslant k \geqslant 1$, kombinatorycznie następujące tożsamości ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k} = m^n.$$

Zadanie 3.19. Pokazać używając argumentów kombinatorycznych i algebraicznych, że następująca równość zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2(n-k)!^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

Zadanie 3.20. Udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Zadanie 3.21. Używając argumentów kombinatorycznych udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^k.$$

Zadanie 3.22. Podać kombinatoryczne i algebraiczne uzasadnienie tożsamości:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3.23. Udowodnić na dwa sposoby, używając argumentów kombinatorycznych i algebraicznych, wzór

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

Zadanie 3.24. Udowodnić na dwa sposoby, używając argumentów kombinatorycznych i algebraicznych, wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Zadanie 3.25. Udowodnić na dwa sposoby, używając argumentów kombinatorycznych i algebraicznych, że dla dowolnych $0 \leq k \leq n \leq m$

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{m-k}\binom{m-k}{n-k}.$$

Zadanie 3.26. Pokazać, że dla $n \geqslant m > r \geqslant 0$

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}.$$

Zadanie 3.27. Pokazać, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{n+k-1}{k}.$$

Zadanie 3.28. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości n i k, dla których zachodzi równość $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k}$.

Zadanie 3.29. Udowodnić, że

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Zadanie 3.30. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

Zadanie 3.31. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

(a) $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ jest liczbą całkowitą parzystą,

(b) $(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n = b_n\sqrt{2}$, gdzie $b_n \in \mathbb{N}$.

4

Zależności rekurencyjne

Zadanie 4.1. Znaleźć i udowodnić wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = n^2 a_{n-1}$$

przy założeniu, że $a_1 = 1$.

Zadanie 4.2. Każdego roku pewna populacja królików podwaja się. Jeżeli początkowo było sześć królików, to ile ich będzie po n latach?

Zadanie 4.3. Niech b_n oznacza liczbę takich n-elementowych ciągów binarnych, że żadne dwa po sobie następujące 0 nie są dozwolone. Znaleźć zależność rekurencyjną dla b_n.

Zadanie 4.4. Niech $h(k, n)$ będzie liczbą rozsadzeń w określonym porządku k pacjentów w poczekalni, w której jest n krzeseł, tak aby żaden pacjent nie siedział bezpośrednio obok drugiego. Znaleźć zależność rekurencyjną dla $h(k, n)$.

Zadanie 4.5. Niech p_n będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste zbiory? Znaleźć zależność rekurencyjną dla p_n i na jej podstawie wyznaczyć wzór na liczbę takich podziałów.

Zadanie 4.6. Niech s_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, wliczając zbiór pusty, które nie zawierają sąsiednich liczb? Znaleźć zależność rekurencyjną dla s_n i na jej podstawie wyznaczyć wzór na liczbę takich podzbiorów.

Zadanie 4.7. Przypuśćmy, że dowolna nowourodzona para królików ma swoją pierwszą parę potomstwa po dwóch miesiącach, a później już co miesiąc rodzi nową parę. Zakładając, że zaczynamy od jednej pary, znaleźć zależność rekurencyjną dla k_n - liczby par po n miesiącach.

Zadanie 4.8. Rozwiązać równania rekurencyjne:

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$.

(b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 2$.

(c) Korzystając z faktu, że

$$(x-2)^2(x+1)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

podać wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} - 4a_{n-3} + 12a_{n-4}.$$

Zadanie 4.9. Stosując równanie charakterystyczne rozwiązać zależność rekurencyjną

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 4$, $a_1 = 4$.

Zadanie 4.10. Rozwiązać równania rekurencyjne:
(a) $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
(b) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = a_1 = 2$.
(c) $a_n = a_{n-1} + 7n$, $a_0 = 0$.

Zadanie 4.11. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2,$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

Zadanie 4.12. Rozwiązać następujące liniowe równania rekurencyjne
(a) $a_{n+1} = 2a_n - 1$, gdzie $a_0 = 3$,
(b) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, gdzie $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$,
(c) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, gdzie $a_0 = 2$,
(d) $a_n = a_{n-1} + n^3$, gdzie $a_0 = 0$,
(e) $a_n = 3a_{n-1} - 4n$, gdzie $a_0 = 2$,
(f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, gdzie $a_0 = 2$,
(g) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, gdzie $a_0 = 2$ i $a_1 = 1$.

Zadanie 4.13. Znajdź rozwiązanie ogólne następujących liniowych równań rekurencyjnych

(a) $a_{n+2} = 4a_n$,
(b) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 16a_n = 0$.

Zadanie 4.14. Dane jest równanie charakterystyczne

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$$

pewnego liniowego równania rekurencyjnego z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = -9$, $a_2 = -1$ i $a_3 = 2$. Wyznaczyć a_n.

Zadanie 4.15. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = f(n),$$

gdzie

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 5, \\ 0, & \text{dla } n \neq 5, \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $a_0 = a_1 = 0$.

Zadanie 4.16. Niech a_n oznacza liczbę rozłącznych części na jakie dzielą n-kąt wypukły jego przekątne. Zakładamy, że żadne 3 przekątne nie przecinają się w jednym punkcie.

(a) Pokaż, że

$$a_n = a_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n - 2 \qquad \text{dla } n \geqslant 3$$

oraz $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

(b) Wyznacz a_n.

Zadanie 4.17. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$na_n + na_{n-1} - a_{n-1} = 2^n$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 3\,456$.

Zadanie 4.18. Rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_n = na_{n-1} + n!$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 2$.

Zadanie 4.19. Znaleźć wartość wielomianu

$$w_n(x) = 9x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 5x + 4$$

dla $x = 7$ korzystając ze schematu Hornera.

Zadanie 4.20. Korzystając z metody Newtona znaleźć z dokładnością do 10^{-6} pierwiastek równania

$$e^{-x} = x$$

Zadanie 4.21. Udowodnić, że dla liczb Fibonacciego spełnione są tożsamości

(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$,
(b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$,
(c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$,
(d) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Zadanie 4.22. Udowodnić, że liczby Fibonacciego spełniają tożsamość

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \tag{4.1}$$

znaną jako równość Cassiniego.

Zadanie 4.23. Udowodnić, że dla liczb Lucasa spełnione są równania

(a) $L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 1$,
(b) $L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2$.

5

Aparat funkcji tworzących

Zadanie 5.1. Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\mathcal{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ są formalnymi szeregami potęgowymi, to:

(a) $(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{A}'\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B}'$,

(b) $(\mathcal{A}^n)' = n\mathcal{A}^{n-1}\mathcal{A}'$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\mathcal{A}' \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest stałą (to znaczy, $a_n = 0$ dla $n > 0$).

Zadanie 5.2. Niech $\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie formalnym szeregiem potęgowym, wówczas jego odwrotnością nazywamy taki szereg formalny $\mathcal{A}^{-1}(x)$, że $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \equiv 1$. Udowodnij, że $\mathcal{A}$ posiada odwrotność (jest odwracalny) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \neq 0$.

Zadanie 5.3. Udowodnij, że jeżeli $\mathcal{A}(x)$ jest odwracalnym formalnym szeregiem potęgowymi (patrz Zadanie 5.2), to:

(a) $(\mathcal{A}^{-1})' = -\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-2}$,

(b) $(\mathcal{A}^{-n})' = -n\mathcal{A}^{-n-1}\mathcal{A}'$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(c) $(1 - \mathcal{A})^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \mathcal{A}^k$.

Zadanie 5.4. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdzie a_n oznacza liczbę całkowitych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

jeżeli

(a) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3,\ 2 \leqslant x_3 \leqslant 8,\ 0 \leqslant x_4 \leqslant 4$

(b) $2 \leqslant x_i \leqslant 8$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ oraz x_1 jest parzyste a x_2 nieparzyste.

Zadanie 5.5. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdzie a_n jest liczbą rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ w dziedzinie liczb całkowitych nieujemnych i nieparzystych.

Zadanie 5.6. Wykorzystując aparat funkcji tworzących wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12,$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, $x_1, x_2 \leq 3$ i $x_3, x_4 \leq 4$.

Zadanie 5.7. Wyznacz funkcję tworzącą liczby możliwych rozdziałów n jabłek wśród pięciu osób, jeżeli

(a) nie ma dodatkowych ograniczeń,

(b) każda osoba otrzyma co najmniej jedno jabłko.

Zadanie 5.8. Wyznaczyć, korzystając z aparatu funkcji tworzących, ilość sposobów otrzymania łącznie 13 oczek, jeżeli rzuca się trzema kostkami jednocześnie.

Zadanie 5.9. Rozpatrując funkcje $f(x) = (1 \pm x)^{2n}$ wyznaczyć

(a) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$,

(b) $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \binom{n}{3}^2 + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}^2$.

Zadanie 5.10. Spośród $n + k$ osób, które chcą kupić lody po 1€, n osób posiada monetę 1€ i k osób posiada monetę 2€. Na ile sposobów można ustawić te osoby w kolejkę tak, aby sprzedawca zawsze mógł wydać resztę (zakładamy, że na początku sprzedawca nie miał żadnych monet)?

Zadanie 5.11. Ile jest najkrótszych dróg na kracie $n \times n$ z punktu A (o współrzędnych $(0, 0)$) do punktu B (o współrzędnych (n, n)), które nie wychodzą ponad przekątną AB?

Zadanie 5.12. Ile jest możliwych triangularyzacji $(n+2)$-kąta wypukłego przy pomocy nieprzecinających się przekątnych? Zadanie ten jest znane w literaturze jako *problem Eulera podziału wielokąta*.

Zadanie 5.13. Korzystając z funkcji tworzącej znaleźć na ile sposobów możemy rozmienić 50 zł na banknoty 20 i 10 zł oraz monety 5, 2 i 1 zł, jeżeli nie może być więcej niż pięć złotówek, więcej niż pięć dwuzłotówek ani więcej niż pięć pięciozłotówek.

Zadanie 5.14. Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdzie a_n oznacza liczbę słów długości n ułożonych z liter A, B, C, w których litera A występuje co najmniej dwa razy.

Zadanie 5.15. Stosując aparat funkcji tworzących rozwiązać równanie rekurencyjne (**??**) z warunkiem początkowym $a_1 = 1$.

Zadanie 5.16. Stosując aparat funkcji tworzących rozwiązać równanie rekurencyjne (**??**) z warunkiem początkowym $a_0 = 1$.

Zadanie 5.17. Stosując aparat funkcji tworzących rozwiązać równanie Fibonacciego (**??**) z warunkami początkowymi $a_0 = a_1 = 1$.

Zadanie 5.18. Stosując aparat funkcji tworzących rozwiązać układ równań rekurencyjnych

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $a_0 = b_0 = 1$.

6

Algebry Boole'a

Zadanie 6.1. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie iloczynem różnych liczb pierwszych oraz niech $D(n)$ będzie zbiorem wszystkich dodatnich dzielników n. Pokazać, że jeżeli zdefiniujemy $\sqcup$ jako „najmniejszą wspólną wielokrotność" a $\sqcap$ jako „największy wspólny dzielnik" to zbiór $D(n)$ jest algebrą Boole'a.

Zadanie 6.2. Udowodnić, że nie istnieje trójelementowa algebra Boole'a.

Zadanie 6.3. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a, b i c algebry Boole'a zachodzi

(a) $a \sqsubseteq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b' \sqsubseteq a'$,
(b) $a \sqsubseteq c$ i $b \sqsubseteq c$ to $(a \sqcup b) \sqsubseteq c$,
(c) $a \sqsubseteq b$ to $a \not\sqsubseteq b'$ (dla $a \neq \mathbf{0}$).

Zadanie 6.4. Udowodnić, że dla dowolnej skończonej algebry Boole'a $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ spełnione jest następujące prawo

$$\text{jeżeli } \ (x \sqcup a = x \sqcup b \ \text{ i } \ x' \sqcup a = x' \sqcup b), \ \text{ to } \ a = b.$$

Zadanie 6.5. Udowodnić, że dla dowolnej skończonej algebry Boole'a $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ prawdziwe są następujące stwierdzenia:

(a) jeżeli $x \in B$ i $x \sqsubseteq \mathbf{0}$, to $x = \mathbf{0}$,
(b) jeżeli $y \in B$ i $\mathbf{1} \sqsubseteq y$, to $y = \mathbf{1}$,
(c) jeżeli $x, y \in B$, $x \sqsubseteq y$ i $x \sqsubseteq y'$, to $x = \mathbf{0}$.

Zadanie 6.6. Udowodnić, że w każdej skończonej algebrze Boole'a $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ jest spełnione

$$\underset{x,y,z \in B}{\forall} (x \sqcup y) \sqsubseteq z \ \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \sqsubseteq z \ \text{ i } \ y \sqsubseteq z.$$

Zadanie 6.7. Pokazać izomorfizm klasycznego rachunku zdań z algebrą $\mathcal{P}(A)$, dla pewnego zbioru A.

Zadanie 6.8. Znaleźć atomy oraz zdefiniować relacje $\sqsubseteq$ dla algebry Boole'a z Zadania 6.1.

Zadanie 6.9. Udowodnij, że dla dowolnej algebry Boole'a $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ spełnione jest prawo modularne, tzn, że $\forall a, b \in B$ takiego, że $a \sqsubseteq c$ zachodzi

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap c.$$

Zadanie 6.10. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a, b i c algebry Boole'a zachodzi

$$(a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup b') = a \quad \text{i} \quad (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap b') = a.$$

Zadanie 6.11. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a, b i c algebry Boole'a zachodzi

$$(a \sqcup b) \sqcap (a' \sqcup c) = (a \sqcap c) \sqcup (a' \sqcap b) \quad \text{i} \quad (a \sqcap b) \sqcup (a' \sqcap c) = (a \sqcup c) \sqcap (a' \sqcup b).$$

Zadanie 6.12. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a i b algebry Boole'a zachodzi

$$a \sqcup b = b \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad a \sqcap b = a.$$

Zadanie 6.13. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a i b algebry Boole'a zachodzi

$$(a \sqcap b) \sqsubseteq a \sqsubseteq (a \sqcup b)$$

i w konsekwencji $\mathbf{0} \sqsubseteq a \sqsubseteq \mathbf{1}$.

Zadanie 6.14. Udowodnij, że element a algebry Boole'a jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = b \sqcup c \quad \text{implikuje, że} \quad b = a \quad \text{lub} \quad c = a.$$

Zadanie 6.15. Udowodnij, że dla dowolnych elementów a, b i c algebry Boole'a zachodzi

$$a \sqsubseteq b \qquad \text{implikuje, że} \qquad (a \sqcap c) \sqsubseteq (b \sqcap c),$$

$$a \sqsubseteq b \qquad \text{implikuje, że} \qquad (a \sqcup c) \sqsubseteq (b \sqcup c).$$

Zadanie 6.16. Niech B będzie zbiorem składającym się ze zbioru pustego oraz wszystkich skończonych sum przedziałów postaci $[a, b)$, gdzie $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Zdefiniujmy dla każdego $a \in B$ jego dopełnienie przez $a' = [0,1) \setminus a$.

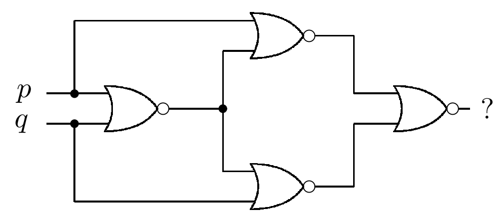
(a) Udowodnij, że $\langle B, \cup, \cap, ', \varnothing, [0,1)\rangle$ jest nieskończoną algebrą Boole'a.

(b) Udowodnij, że powyżej zdefiniowana algebra Boole'a nie posiada żadnego atomu.

Zadanie 6.17. Rozpatrzmy obwód logiczny przedstawiony na rysunku obok.

(a) Znajdź funkcję logiczną, którą ten obwód realizuje.

(b) Znajdź prostszy obwód kombinatoryczny, który tę samą funkcję realizuje przy pomocy mniejszej ilości bramek.



Zadanie 6.18. Zbuduj układy logiczne równoważne bramkom „i", „lub" oraz „nie"

(a) wykorzystując jedynie bramki „nand",

(b) wykorzystując jedynie bramki „nor".

Zadanie 6.19. Niech $f, g : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ będą dwiema funkcjami boolowskimi zdefiniowanymi przez

$$f = \sum m(1, 2, 4, 7, x) \quad \text{i} \quad g = \sum m(0, 1, 2, 3, 16, 25, y, z).$$

Wiedząc, że $f \leq g$ określić x, y i z.

Zadanie 6.20. Niech $f, g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ będą dwiema funkcjami boolowskimi zdefiniowanymi przez

$$f = \sum m(2, 4, 6, 8) \quad \text{i} \quad g = \sum m(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15).$$

Znajdź funkcję boolowską h taką, że $f = gh$.

Zadanie 6.21. Używając tablic Karnaugha zminimalizuj następujące funkcje boolowskie

(a) $f = \sum m(0, 1, 2, 9, 11, 12, 13, 27, 28, 29)$,

(b) $f = \sum m(4, 5, 10, 11, 15, 18, 20, 24, 26, 30, 31, [9, 12, 14, 16, 19, 21, 25])$,

(c) $f = (a' \vee b' \vee c \vee d)(a \vee b' \vee c' \vee d) \vee (a \vee b \vee c \vee d)(a' \vee b)(a \vee d')$.

Zadanie 6.22. Zbudować układ logiczny z trzema wejściami taki, że wyjście jest równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy

(a) wszystkie trzy wejścia są równe,

(b) liczba wejść równych 1 jest większa niż liczba wejść równych 0,

(c) istnieją wejścia o różnych wartościach,

(d) liczba jedynek na wejściu jest parzysta (ten obwód znany jest jako *generator bitu parzystości*).

Zadanie 6.23. Zdefiniować obwód logiczny demultiplexera, tj. obwód na wejściu którego jest jeden bit danych oraz (binarny) adres wyjścia, a na wyjściu bit wejścia kopiowany jest na wyjście o zadanym adresie (pozostałe wyjścia są równe 0). Zakładamy, że adres jest dwubitowy (z możliwymi adresami $0, 1, 2$ i 3).

Zadanie 6.24. Zdefiniować następujące obwody logiczne:

(a) Obwód z dwoma wejściami a i b i trzema wyjściami. Pierwsze wyjście jest równe jeden 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$, drugie wyjście jest równe jeden 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a > b$ i trzecie wyjście jest równe jeden 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

(b) Obwód który porównuje dwie liczby czterobitowe (używając obwodu z poprzedniego punktu jako czarną skrzynkę).

Zadanie 6.25. Zdefiniować obwód logiczny, który na wyjściu ma wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy czterobitowa liczba na wejściu jest podzielna przez:
(a) 3,
(b) 5.

Zadanie 6.26. Udowodnij, że następujące wyrażenia logiczne są równoważne:
(a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ i $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$,
(b) $(p \wedge q) \vee r$ i $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
(c) $(p \vee q) \wedge r$ i $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.